ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN TÂN BÌNH – (2014-2015)

Thời gian: 120 phút
(NGÀY THI: 11/10/2014)

Bài 1: (3 điểm) Rút gọn:

$$A=\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}}$$

Bài 2: Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(x+3)(x-5)-3(x-5)\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=0$ (2 điểm)

b) $3x^2-6x+41=10\sqrt{2x^2+7}$ (2 điểm)

c) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\\ \frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=4\end{cases}$ (2 điểm)

Bài 3: a) Cho a > 1 ; b > 1 ; c > 1. Chứng minh rằng : $\frac{a}{\sqrt{a-1}}+\frac{b}{\sqrt{b-1}}+\frac{c}{\sqrt{c-1}}\ge 6$ (1 điểm)

b) Cho $x\ge\frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=\sqrt{2x^2+5x+2}+2\sqrt{x+3}-2x$ (2 điểm)

c) Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình $x^2-2y^2=1$ (1 điểm)

Bài 4: Cho ΔABC nội tiếp (O) đường kính AB. Kẻ đường cao CH của ΔABC. Vẽ (I) tiếp xúc với HC, HB tại E, D và tiếp xúc trong với (O) tại F.

a) Cho HA – HB = 5,6cm; $\tan CAD=\frac{3}{4}$. Tính CA, CB. (2 điểm)

b) Chứng minh: A, E, F thẳng hàng và ΔACD cân. (2 điểm)

Bài 5: Cho ΔABC CÓ $CBA=60^0; BC=a; AB=c$. (a, c là hai độ dài cho trước). Hình chữ nhật MNHK có đỉnh M trên cạnh AC; N trên cạnh AC; H, K trên cạnh BC. Hình chữ nhật MNHK được gọi là hình chữ nhật nội tiếp ΔABC. Tìm vị trí của M trên cạnh AB để diện tích hình chữ nhật MNHK đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a và c. (3 điểm)

★ HẾT ★

HƯỚNG DẪN ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN TÂN BÌNH (2014-2015)

Bài 1: Rút gọn:

$$A=\left(\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)\cdot\sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}}$$

Đặt $B=\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$; $B>0$

$\Rightarrow B^2=16+2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)}$

$\Rightarrow B^2=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+2\sqrt{\left(2\sqrt{5}-2\right)^2}$

$\Rightarrow B^2=16+4\sqrt{5}-4=12+4\sqrt{5}=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow B=\sqrt{10}+\sqrt{2}$ (vì $B>0$)

Khi đó: $A=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{\left(2+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)=4\sqrt{2}$

Bài 2: Giải phương trình:

a) $(x+3)(x-5)-3(x-5)\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=0$

Điều kiện : $x>5$ hay $x\le -3$

$(x+3)(x-5)-3(x-5)\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left[(x+3)-3\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x+3-3\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=0 \quad (1)\end{array}\right.$

Giải (1): $x+3-3\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=0$ (điều kiện: $x\ge -3$)

$\Leftrightarrow x+3=3\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}\Leftrightarrow (x+3)^2=9\left(\frac{x+3}{x-5}\right)\Leftrightarrow (x+3)\left(x+3-\frac{9}{x-5}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x^2-2x-24=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \ (\text{nhận}) \\ \left[\begin{array}{l} x=-4 \ (\text{loại}) \\ x=6 \ (\text{nhận}) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy $S=\{-3;6\}$

b) $3x^2-6x+41=10\sqrt{2x^2+7}$

$$3x^2-6x+41=10\sqrt{2x^2+7}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+7-10\sqrt{2x^2+7}+25+x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+7}-5\right)^2+(x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+7}-5=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy $S=\{3\}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=5 \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}-20=5 \end{cases}$

Điều kiện: $x\neq 0; y\neq 0; z\neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=5 \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}-20=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z}=5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z^2}=\dfrac{2}{xy}-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{z^2}=25+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{10}{x}-\dfrac{10}{y}+\dfrac{2}{xy} \\ \dfrac{1}{z^2}=\dfrac{2}{xy}-25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{xy}-25=25+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{10}{x}-\dfrac{10}{y}+\dfrac{2}{xy} \\ \dfrac{1}{z}=5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{10}{x}+25\right)+\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{10}{y}+25\right)=0 \\ \dfrac{1}{z}=5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}-5\right)^2+\left(\dfrac{1}{y}-5\right)^2=0 \\ \dfrac{1}{z}=5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=5 \\ \dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{z}=5-5-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \\ z=\dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ pt là $\begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \\ z=\dfrac{-1}{5} \end{cases}$

<u>Bài 3:</u> a) Cho a > 1 ; b > 1 ; c > 1. Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{\sqrt{a-1}}+\dfrac{b}{\sqrt{b-1}}+\dfrac{c}{\sqrt{c-1}}\geq 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\sqrt{1(a-1)}\leq\frac{1+a-1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{a-1}\leq\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a-1}}\geq 2$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\dfrac{b}{\sqrt{b-1}}\geq 2;\ \dfrac{c}{\sqrt{c-1}}\geq 2$

Do đó: $\dfrac{a}{\sqrt{a-1}}+\dfrac{b}{\sqrt{b-1}}+\dfrac{c}{\sqrt{c-1}}\geq 6$. **Dấu ‘’=’’ xảy ra khi** $\begin{cases} a-1=1 \\ b-1=1 \\ c-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$

b) Cho $x \ge \frac{1}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = \sqrt{2x^2+5x+2} + 2\sqrt{x+3} - 2x$

$M = \sqrt{2x^2+5x+2} + 2\sqrt{x+3} - 2x = \sqrt{(2x+1)(x+2)} + 2\sqrt{x+3} - 2x$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(2x+1)(x+2)} \le \dfrac{2x+1+x+2}{2} = \dfrac{3x+3}{2} \\ 2\sqrt{x+3} \le \dfrac{4+x+3}{2} = \dfrac{x+7}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{(2x+1)(x+2)} + 2\sqrt{x+3} \le \frac{3x+3}{2} + \frac{x+7}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(x+2)} + 2\sqrt{x+3} \le 2x+5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(x+2)} + 2\sqrt{x+3} - 2x \le +5$

$\Leftrightarrow M \le 5$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 5

Dấu ''='' xảy ra khi $\begin{cases} 2x+1 = x+2 \\ 4 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

c) Tìm nghiệm nguyên tố của phương trình $x^2 - 2y^2 = 1$

Cách 1:

$x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) \vdots 2 \Rightarrow$ **trong 2 số $(x-1)$ và $(x+1)$ phải có ít nhất 1 số chẵn. (1)**

Ta có: $(x-1)+(x+1) = 2x$ là 1 số chẵn $\Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (x-1)$ và $(x+1)$ cùng chẵn.

$\Rightarrow \begin{cases} (x-1) \vdots 2 \\ (x+1) \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(x+1) \vdots 4 \Rightarrow 2y^2 \vdots 4 \Rightarrow y^2 \vdots 2 \Rightarrow y = 2$ **(vì y nguyên tố)**

Thế x = 2 vào $x^2 - 2y^2 = 1$, ta được: $x^2 - 2.2^2 = 1 \Rightarrow x = 3$ (vì x nguyên tố)

Vậy cặp nghiệm nguyên tố duy nhất của phương trình là x = 3; y = 2 .

Cách 2:

$x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)x(x+1) = 2xy^2$

mà $(x-1)x(x+1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(x-1)x(x+1) \vdots 6$

Do đó : $2xy^2 \vdots 6 \Rightarrow xy^2 \vdots 3$

TH1: $x \vdots 3 \Rightarrow x = 3$ **(vì x nguyên tố)**

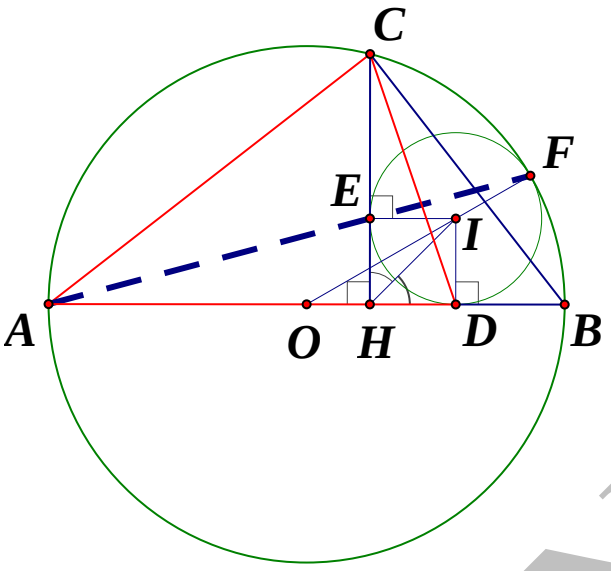
Thế x = 3 vào $x^2 - 2y^2 = 1$, ta được: $3^2 - 2.y^2 = 1 \Rightarrow y = 2$ (vì y nguyên tố)

TH2: $y \vdots 3 \Rightarrow y = 3$ **(vì y nguyên tố)**

Thế y = 3 vào $x^2 - 2y^2 = 1$, ta được: $x^2 - 2.3^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 29$ loại (vì x nguyên tố)

Vậy cặp nghiệm nguyên tố duy nhất của phương trình là x = 3; y = 2 .

<u>Bài 4:</u> Cho ΔABC nội tiếp (O) đường kính AB. Kẻ đường cao CH của ΔABC. Vẽ (I) tiếp xúc với HC, HB tại E, D và tiếp xúc trong với (O) tại F.



a) Cho HA – HB = 5,6cm; $\tan CAD = \frac{3}{4}$. Tính CA, CB.

Dễ thấy $CAB = HCB \Rightarrow \tan CAB = \tan HCB \Rightarrow \frac{HC}{HA} = \frac{HB}{HC} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{HC}{HA} \cdot \frac{HB}{HC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{9}{16}$

Mà HA – HB = 5,6 nên HA = 12,8 (cm); HB = 7,2 (cm)

Ta có: AB = HA + HB = 12,8 + 7,2 = 20 (cm)

Xét ΔCAB vuông tại C, ta có CH là đường cao

$$\Rightarrow \begin{cases} CA^2 = HA.AB = (12,8).(20) = 256 \\ CB^2 = HB.AB = (7,2).(20) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CA = 16(cm) \\ CB = 12(cm) \end{cases}$$

b) Chứng minh: A, E, F thẳng hàng và ΔACD cân.

Xét ΔFIE và ΔFOA, ta có:

$$\Rightarrow \begin{cases} FIE = FOA \text{ (2 góc đồng vị và IE // OA)} \\ \frac{IF}{OF} = \frac{IE}{OA} \text{ (tỉ số 2 bán kính của (I) và (O))} \end{cases} \Rightarrow \Delta FIE \backsim \Delta FOA (c-g-c) \Rightarrow IFE = OFA$$

$\Rightarrow$ tia FE trùng với tia FA $\Rightarrow$ A, E, F thẳng hàng.

Dễ thấy: $\begin{cases} EIO = 2EFI \text{ (góc ngoài } \Delta IEF \text{ cân tại I)} \\ OID = 2IFD \text{ (góc ngoài } \Delta IDF \text{ cân tại I)} \end{cases}$

$\Rightarrow EIO + OID = 2(EFI + IFD) \Rightarrow EID = 2EFD \Rightarrow EFD = \frac{EID}{2}$

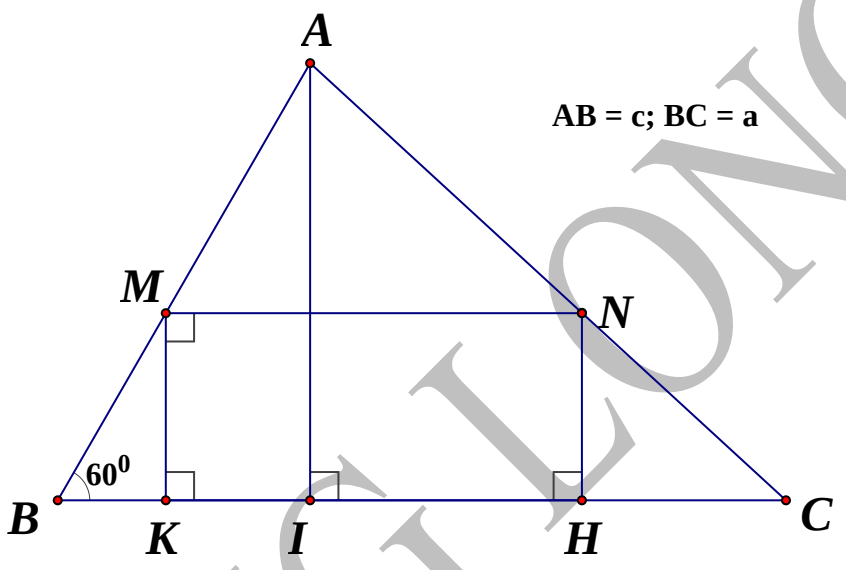
Mặt khác: $ADE = 90^0 - IDE = 90^0 - \frac{180^0 - DIE}{2} = \frac{DIE}{2}$

Do đó: $ADE = EFD$.... $\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta AFD (g-g) \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AE.AF$

Mà $\begin{cases} AE.AF = AH.AB\left(\Delta AHE \backsim \Delta AFB\right) \\ AH.AB = AC^2 \left(\text{Hệ thức lượng}\right) \end{cases}$

nên $AD^2 = AC^2 \Rightarrow AD = AC \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại A.

Bài 5: Cho ΔABC CÓ $CBA = 60^0; BC = a; AB = c$. (a, c là hai độ dài cho trước). Hình chữ nhật MNHK có đỉnh M trên cạnh AC; N trên cạnh AC; H, K trên cạnh BC. Hình chữ nhật MNHK được gọi là hình chữ nhật nội tiếp ΔABC. Tìm vị trí của M trên cạnh AB để diện tích hình chữ nhật MNHK đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo a và c.



ΔABI vuông tại I có $B = 60^0 \Rightarrow \sin B = \dfrac{AI}{AB} \Rightarrow AI = AB.\sin B = c.\sin 60^0 = c.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Dễ thấy $\begin{cases} \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \\ \dfrac{MK}{AI} = \dfrac{BM}{AB} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{MN}{BC}\cdot\dfrac{MK}{AI} = \dfrac{AM}{AB}\cdot\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{AM.BM}{AB^2} \le \dfrac{1}{4}\dfrac{\left(AM+BM\right)^2}{AB^2} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{AB^2}{AB^2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow S_{MNHK} \le \dfrac{1}{4}BC.AI = \dfrac{1}{4}a.c.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}ac$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AM = MB \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AB. Khi đó $S_{MNHK} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}ac$

★ HẾT ★